



Aalborg Universitet

AALBORG UNIVERSITY
DENMARK

Elastiske bjælkesøjler

Rathkjen, Arne

Publication date:
1999

Document Version
Tidlig version også kaldet pre-print

[Link to publication from Aalborg University](#)

Citation for published version (APA):
Rathkjen, A. (1999). *Elastiske bjælkesøjler*. Institut for Bygningsteknik, Aalborg Universitet. U/ Bind U9912

General rights

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal -

Take down policy

If you believe that this document breaches copyright please contact us at vbn@aub.aau.dk providing details, and we will remove access to the work immediately and investigate your claim.

INSTITUTTET FOR BYGNINGSTEKNIK

DEPT. OF BUILDING TECHNOLOGY AND STRUCTURAL ENGINEERING
AALBORG UNIVERSITET • AAU • AALBORG • DANMARK

TEAM 1999.2

A. RATHKJEN
ELASTISKE BJÆLKESØJLER
SEPTEMBER 1999

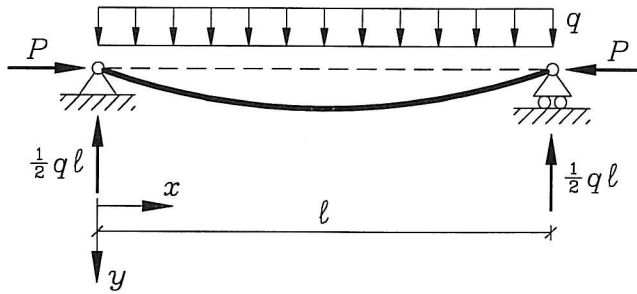
ISSN 1395-8232 U9912

ELASTISKE BJÆLKESØJLER

1. SØJLER MED TVÆRBELASTNING
2. SØJLER MED FORHÅNSKRUMNING
3. SØJLER MED TVÆRBELASTNING OG FORHÅNSKRUMNING

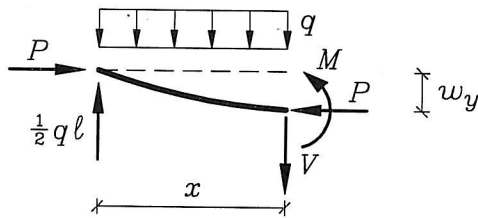
1. SØJLER MED TVÆRBELASTNING

En simpelt understøttet bjælke påvirket af en jævnt fordelt last q og en tryknormalkraft P betragtes, se figur 1.1, som viser bjælken i udbøjet ligevægtsstilling.



Figur 1.1

I et vilkårligt punkt i afstanden x fra venstre understøtning er udbøjningen w_y og snitkræfterne $N = -P$, V og M , se figur 1.2



Figur 1.2

En momentligning giver

$$M = \frac{1}{2}qlx - \frac{1}{2}qx^2 + Pw_y \quad (1.1)$$

Benyttes den konstitutive ligning

$$M = EI\kappa = -EI d^2 w_y / dx^2 \quad (1.2)$$

og indføres betegnelsen

$$k^2 = P/EI \quad (1.3)$$

fås differentialligningen

$$d^2 w_y / dx^2 + k^2 w_y = -\frac{1}{2}k^2 qx(l-x)/P \quad (1.4)$$

med den fuldstændige løsning

$$w_y = C_1 \sin kx + C_2 \cos kx - q(x(l-x)/2 + 1/k^2)/P \quad (1.5)$$

hvor konstanterne C_1 og C_2 bestemmes af randbetingelserne $w_y = 0$ for $x = 0$ og $w_y = 0$ for $x = l$.

På matrixform kan disse betingelser skrives

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \sin kl & \cos kl \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}^{q/Pk^2} \quad (1.6)$$

Undersøgelsen må nu deles i to tilfælde: $q = 0$ og $q \neq 0$. Når $q = 0$ taler man om en centralt belastet Eulersøjle, og for $q \neq 0$ taler man om en tværbelastet bjælkesøjle med momentforøgelse, idet momentet hidrørende fra tværbelastningen forøges på grund af tryknormalkraften.

1.1 Eulersøjle

Med tværbelastningen $q = 0$ bliver ligningssystemet (1.6)

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \sin kl & \cos kl \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1.7)$$

som har egentlige løsninger for determinanten til koefficientmatricen lig med nul, dvs.

$$\sin kl = 0 \Rightarrow kl = n\pi, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (1.8)$$

hvorefter udtrykket for udbøjningslinien bliver

$$w_y = C_1 \sin kx \quad (1.9)$$

hvor konstanten C_1 , som er søjlens udbøjning for $x = l/2$, er ubestemt.

Den mindste værdi af P , som svarer til ligevægt i udbøjet stilling, den såkaldte *Eulerkraft*, findes for $n = 1$ og dermed $kl = \pi$ og

$$P_E = \pi^2 EI / l^2 \quad (1.10)$$

Den hertil hørende *Eulerspænding* er

$$\sigma_E = P_E / A = \pi^2 EI / l^2 A \quad (1.11)$$

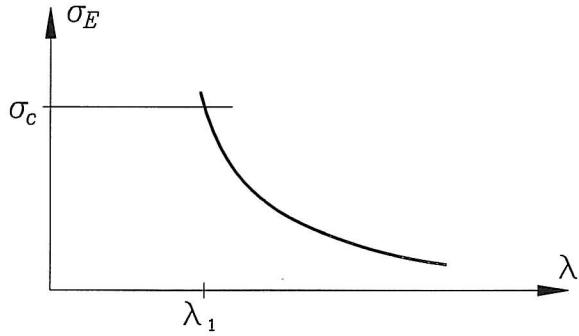
Indføres *inerttiradius* i og *slankhedsforhold* λ ved

$$i^2 = I / A, \quad \lambda = l / i \quad (1.12)$$

fås

$$\sigma_E = \pi^2 E / \lambda^2 \quad (1.13)$$

Sammenhængen mellem σ_E og λ er vist i figur 1.3, hvor den vandrette linie $\sigma_E = \sigma_c$ viser, at normalspændingen ikke kan blive større end trykbrudstyrken σ_c .



Figur 1.3

Eulerspændingen er lig med trykstyrken for

$$\sigma_E = \pi^2 E / \lambda_1^2 = \sigma_c \quad (1.14)$$

dvs.

$$\lambda_1^2 = \pi^2 E / \sigma_c \quad (1.15)$$

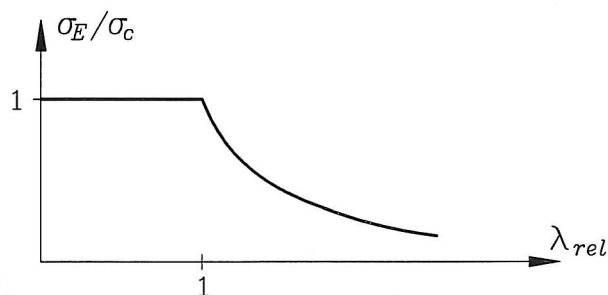
og ved at indføre det relative slankhedsforhold λ_{rel} ved

$$\lambda_{\text{rel}}^2 = \lambda^2 / \lambda_1^2 = \lambda^2 \sigma_c / \pi^2 E = \sigma_c / \sigma_E \quad (1.16)$$

fås

$$\sigma_E / \sigma_c = 1 / \lambda_{\text{rel}}^2, \quad \lambda_{\text{rel}} > 1 \quad (1.17)$$

Denne sammenhæng er vist i figur 1.4.



Figur 1.4

1.2 Momentforøgelsesfaktoren

Mens en Eulersøjle kun kan være i ligevægt i udbøjet stilling for ganske bestemte, såkaldte kritiske værdier af tryknormalkraften P , nemlig

$$P_{kr} = n^2 \pi^2 EI / l^2, \quad n = 1, 2, 3 \dots \quad (1.18)$$

og for alle andre værdier mindre end trykbrudkraften vil være i ligevægt i den oprindelige retliniede stilling, så er forholdene ganske anderledes, når bjælkesøjlen også påvirkes af en tværbelastning q . Bjælkesøjlen vil altid befinde sig i en udbøjet stilling og tryknormalkraftens virkning er at forøge såvel udbøjning som moment.

Ligningssystemet (1.6) har nu kun egentlige løsninger, når determinanten til koefficientmatricen er forskellig fra nul, dvs. $\sin kl \neq 0$, og man finder

$$\begin{aligned} C_2 &= q/k^2 P = ql^2 / P(kl)^2 \\ C_1 &= ql^2 (1 - \cos kl) / P(kl)^2 \sin kl \end{aligned} \quad (1.19)$$

og hermed

$$w_y = ql^2 ((1 - \cos kl) \sin kx / \sin kl + \cos kx) / P(kl)^2 - q(x(l-x)/2 + 1/k^2) / P \quad (1.20)$$

samt

$$M = ql^2 ((1 - \cos kl) \sin kx / \sin kl + \cos kx - 1) / (kl)^2 \quad (1.21)$$

I bjælkens midtpunkt, $x = l/2$, finder man

$$\begin{aligned} M(x = l/2) &= ql^2 (1 / \cos(kl/2) - 1) / (kl)^2 \\ &= M_0 f(kl) \end{aligned} \quad (1.22)$$

hvor $M_0 = ql^2/8$ er det simple moment og $f(kl) = 8(1/\cos(kl/2) - 1)/(kl)^2$ betegnes *momentforølgelsesfaktoren*. I figur 1.5 er $f(kl)$ optegnet. Det ses, at f og dermed moment og udbøjning går mod uendeligt store værdier for $kL \rightarrow \pi$ dvs. $P \rightarrow P_E$. Den her anvendte teori forudsætter små udbøjninger og gælder således ikke i dette område. Benyttes en teori baseret på store udbøjninger, finder man store men dog endelige momenter og udbøjninger.

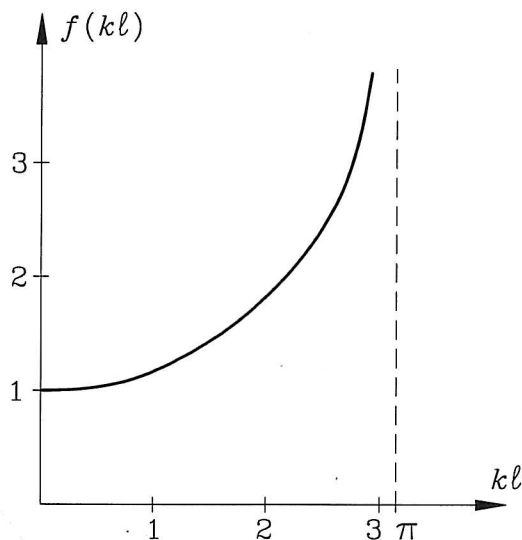


Fig. 1.5

For andre former af tværbelastning end den jævnt fordelte finder man andre udtryk for $f(kl)$, men det principielle forløb er det samme som her.

En tilnærmet værdi af momentforølgelsesfaktoren finder man ved at bemærke, at udbøjningen på midten af en simpelt understøttet bjælke kan skrives

$$f = \kappa_0 l^2 / \alpha = M_0 l^2 / \alpha EI \quad (1.23)$$

hvor $\alpha = \pi^2$ ved sinusformet momentkurve

$\alpha = 48/5$ ved 2. grads parabelformet momentkurve

$\alpha = 8$ ved konstant momentkurve

$\alpha = 12$ ved trekantformet momentkurve

Skrives nu

$$M_{\text{midt}} = M_0 + P f \quad (1.24)$$

og

$$\begin{aligned}
 f &= (M_0/\alpha + Pf/\pi^2)l^2/EI \\
 &= (\pi^2 M_0/\alpha + Pf)/P_E
 \end{aligned}
 \tag{1.25}$$

dvs.

$$f = \pi^2 M_0 / \alpha (P_E - P) \tag{1.26}$$

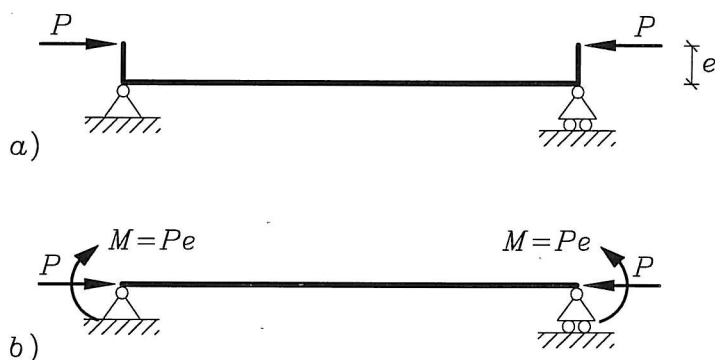
så finder man

$$M = M_0(1 + \pi^2 P / \alpha (P_E - P)) = M_0(P_E - P + \pi^2 P / \alpha) / (P_E - P) \tag{1.27}$$

Med $\alpha = \pi^2$ fås den tilnærmede momentforøgelsesfaktor

$$P_E / (P_E - P) \tag{1.28}$$

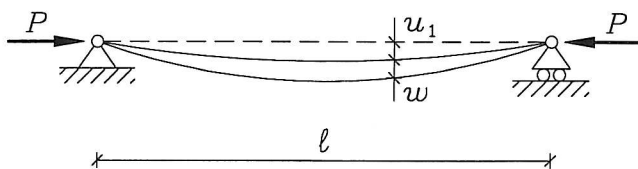
En excentrisk belastet søjle, som vist i figur 1.6a, beregnes som den tværbelastede søjle vist i figur 1.6b.



Figur 1.6

2. SØJLER MED FORHÅNSKRUMNING

Eksakt retliniede søjler belastet med eksakt centralt virkende normalkræfter er en matematisk fiktion. Man kan tage hensyn til, at søjlen ikke er retliniet, ved at forudsætte en vis udbøjning allerede inden belastningen påføres. I figur 2.1 er vist forhåndsudbøjningen u_1 og tillægsudbøjningen w hidrørende fra tryknormalkraften P .



Figur 2.1

Antages forhåndsudbøjningen at være sinusformet

$$u_1 = f \sin \pi x / l \quad (2.1)$$

bliver momentet

$$\begin{aligned} M &= P(u_1 + w) = P(f \sin \pi x / l + w) = \\ &= EI \kappa = -EI d^2 w / dx^2 \end{aligned} \quad (2.2)$$

og med

$$k^2 = P / EI \quad (2.3)$$

fås differentialligningen

$$d^2 w / dx^2 + k^2 w = -k^2 f \sin \pi x / l \quad (2.4)$$

Løsningen til denne ligning er

$$w = C_1 \sin kx + C_2 \cos kx + (k^2 f \sin \pi x / l) / ((\pi / l)^2 - k^2) \quad (2.5)$$

med randbetingelserne $w = 0$ for $x = 0$ og $w = 0$ for $x = l$.

$x, w = 0, 0$ medfører $C_2 = 0$, mens $x, w = l, 0$ herefter er opfyldt for enten $kl = n\pi, n = 1, 2, \dots$ eller for $C_1 = 0$. $kl = n\pi$ svarende til $P = P_E$ kan ikke bruges, da P må være mindre end Eulerkraften på grund af forhåndsudbøjningen. Den brugbare løsning er derfor $C_1 = 0$ og dermed

$$w = (k^2 f \sin \pi x / l) / ((\pi / l)^2 - k^2) \quad (2.6)$$

Den største udbøjning findes for $x = l/2$ og bliver

$$u_1 + w = f \left(1 + k^2 / ((\pi / l)^2 - k^2) \right)$$

$$\begin{aligned}
&= f \frac{\pi^2/l^2}{\pi^2/l^2 - k^2} = f \frac{\pi^2 EI/l^2}{\pi^2 EI/l^2 - EI k^2} \\
&= f \frac{P_E}{P_E - P}
\end{aligned} \tag{2.7}$$

og det største moment er

$$M = P f \frac{P_E}{P_E - P} \tag{2.8}$$

Den største kantspænding bliver nu

$$\sigma = \frac{P}{A} + \frac{P}{W} f \frac{P_E}{P_E - P} \tag{2.9}$$

som skal være mindre end trykstyrken σ_c . Med $\sigma_N = P/A$ og $\sigma_E = P_E/A$ har man

$$\sigma = \sigma_N + \sigma_N \frac{fA}{W} \frac{\sigma_E}{\sigma_E - \sigma_N} \leq \sigma_c \tag{2.10}$$

eller

$$\frac{\sigma_N}{\sigma_c} + \frac{1}{1 - \sigma_N/\sigma_E} \frac{\sigma_N}{\sigma_c} \frac{fA}{W} \leq 1 \tag{2.11}$$

Ifølge (1.17) er $\sigma_E = \sigma_c/\lambda_{\text{rel}}^2$ og med $fA/W = e$ har man

$$\frac{\sigma_N}{\sigma_c} + \frac{1}{1 - \lambda_{\text{rel}}^2 \sigma_N/\sigma_c} \frac{\sigma_N}{\sigma_c} e \leq 1 \tag{2.12}$$

dvs.

$$\lambda_{\text{rel}}^2 (\sigma_N/\sigma_c)^2 - (1 + e + \lambda_{\text{rel}}^2) \sigma_N/\sigma_c + 1 \geq 0 \tag{2.13}$$

Sættes

$$B = (1 + e + \lambda_{\text{rel}}^2)/2 \tag{2.14}$$

finder man

$$\sigma_N/\sigma_c = \left(B - \sqrt{B^2 - \lambda_{\text{rel}}^2} \right) / \lambda_{\text{rel}}^2 = \frac{1}{B + \sqrt{B^2 - \lambda_{\text{rel}}^2}} \leq 1 \tag{2.15}$$

Skrives reduktionsfaktoren

$$\eta = 1 / \left(B + \sqrt{B^2 - \lambda_{\text{rel}}^2} \right) \quad (2.16)$$

er søjlens bæreevne

$$P = \sigma_N A = \eta A \sigma_c \quad (2.17)$$

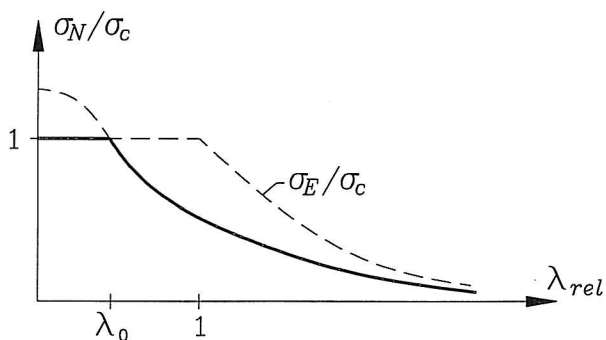
hvor η blandt andet afhænger af faktoren $e = fA/W$. For helt korte søjler regnes ikke med nogen forhåndsudbøjning, og man kan sætte $e = 0$ for $\lambda_{\text{rel}} < \lambda_0$. Et simpelt udtryk er

$$e = \psi(\lambda_{\text{rel}} - \lambda_0), \quad \lambda_{\text{rel}} > \lambda_0 \quad (2.18)$$

hvor ψ er en imperfektionsfaktor, som tager hensyn til tværsnitsform, materialekvalitet m.v. Hermed bliver

$$B = (1 + \psi(\lambda_{\text{rel}} - \lambda_0) + \lambda_{\text{rel}}^2) / 2 \quad (2.19)$$

og sammenhængen mellem σ_N/σ_c og λ_{rel} bliver nu som vist i figur 2.2



Figur 2.2

For andre søjleformer end den simpelt understøttede benyttes den kritiske søjlespænding σ_{kr} i stedet for Eulerspændingen σ_E og det hertil hørende relative slankhedsforhold

$$\lambda_{\text{rel}}^2 = \sigma_c / \sigma_{kr} \quad (2.20)$$

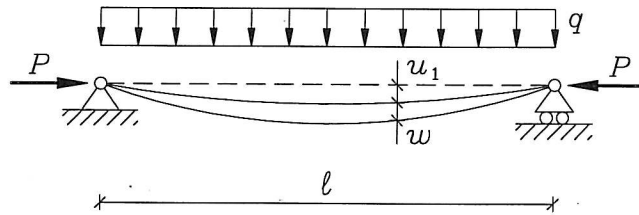
Ovenstående formelapparat anvendes i både DS 412, Norm for stålkonstruktioner og DS 413, Norm for trækonstruktioner, idet der dog benyttes afvigende notationer. En oversigt over de anvendte notationer er givet i tabel 2.1.

Her	DS 412	DS 413
σ_c	f_y	f_c
λ_{rel}	λ	λ_{rel}
B	ϕ	k
η	χ	k_c
ψ	α	β_c
λ_0	0,2	0,5

Tabel 2.1

3. SØJLER MED TVÆRBELASTNING OG FORHÅNDSKRUMNING

Når en bjælkesøjle på samme tid er tværbelastet og har en forhåndsudbøjning, se figur 3.1, finder man, når tværbelastningen q er jævnt fordelt og når forhåndsudbøjningen u_1



Figur 3.1

er sinusformet, at momentet bliver

$$\begin{aligned}
 M &= M_0 + P(u_1 + w) = \frac{1}{2}qx(l - x) + P(f \sin \pi x/l + w) \\
 &= -EI d^2 w / dx^2
 \end{aligned}
 \tag{3.1}$$

og dermed differentiaalligningen

$$d^2 w / dx^2 + k^2 w = -\frac{1}{2}k^2 qx(l - x)/P - k^2 f \sin \pi x/l \tag{3.2}$$

med løsningen

$$\begin{aligned}
 w &= C_1 \sin kx + C_2 \cos kx - q(x(l - x)/2 + 1/k^2)/P \\
 &\quad + (k^2 f \sin \pi x/l) / ((\pi/l)^2 - k^2)
 \end{aligned}
 \tag{3.3}$$

Randbetingelsen $x, w = 0, 0$ giver nu

$$C_2 = ql^2 / P(kl)^2 \tag{3.4}$$

og randbetingelsen $x, w = l, 0$ herefter

$$C_1 = ql^2(1 - \cos kl)/P(kl)^2 \sin kl \quad (3.5)$$

dvs.

$$\begin{aligned} w = & ql^2(1 - \cos kl) \sin kx/P(kl)^2 \sin kl + ql^2 \cos kx/P(kl)^2 \\ & - q(x(l - x)/2 + 1/k^2)/P + (k^2 f \sin \pi x/l)/((\pi/l)^2 - k^2) \end{aligned} \quad (3.6)$$

For $x = l/2$ har man

$$u_1 + w = f(\pi/l)^2/((\pi/l)^2 - k^2) - ql^2/8P + q(1/\cos(kl/2) - 1)/Pk^2 \quad (3.7)$$

og hermed bliver det maksimale moment

$$\begin{aligned} M_{\max} = & M_0 + P(u_1 + w) \\ = & q(1/\cos(kl/2) - 1)/k^2 + PfP_E/(P_E - P) \end{aligned} \quad (3.8)$$

Benyttes den tilnærmede momentforøgelsesfaktor (1.28) fås

$$M_{\max} = (M_0 + Pf)P_E/(P_E - P) \quad (3.9)$$

hvor man med jævnt fordelt last q har $M_0 = ql^2/8$, men udtrykket benyttes ofte for andre belastninger.

Den maksimale trykspænding, som optræder i tværsnittet, bliver nu

$$\sigma = P/A + (M_0 + Pf)P_E/W(P_E - P) \leq \sigma_c \quad (3.10)$$

som med

$$\begin{aligned} \sigma_N = & P/A \\ \sigma_M = & M_0/W \end{aligned} \quad (3.11)$$

bliver

$$\sigma_N + (\sigma_N fA/W + \sigma_M)/(1 - \sigma_N/\sigma_E) \leq \sigma_c \quad (3.12)$$

Indføres yderligere

$$\begin{aligned} e = & fA/W \\ \lambda_{\text{rel}}^2 = & \sigma_c/\sigma_E \Rightarrow \sigma_N/\sigma_E = \lambda_{\text{rel}}^2 \sigma_N/\sigma_c \end{aligned} \quad (3.13)$$

fås

$$\left(1 + \frac{e}{1 - \lambda_{\text{rel}}^2 \sigma_N / \sigma_c}\right) \frac{\sigma_N}{\sigma_c} + \frac{1}{1 - \lambda_{\text{rel}}^2 \sigma_N / \sigma_c} \frac{\sigma_M}{\sigma_c} \leq 1 \quad (3.14)$$

I ovenstående udledning er det forudsat, at der kun er tale om udbøjning og tværbelastning i 1 retning, dvs. bøjning om 1 akse. Når der er tale om bøjning om 2 hovedakser, må notationen indrettes herefter. Med x -aksen som bjælkeakse og y -aksen og z -aksen som de to hovedakser i tværsnittet, benyttes ved bøjning om z -aksen, dvs. udbøjning i y -retningen

$$\begin{aligned} &\text{maksimal forhåndsudbøjning } f_y \\ &\text{modstandsmoment } W_z \\ &\text{Eulerkraft og spænding } P_{Ez}, \sigma_{Ez} \\ &\text{moment og bøjningsspænding } M_{0z}, \sigma_{Mz} \\ &e_z = f_y A / W_z \\ &\lambda_{\text{rel}z}^2 = \sigma_c / \sigma_{Ez} \end{aligned} \quad (3.15)$$

Ved bøjning om y -aksen, dvs. udbøjning i z -retningen, benyttes tilsvarende

$$\begin{aligned} &f_z, W_y, P_{Ey}, \sigma_{Ey}, M_{0y}, \sigma_{My} \\ &e_y = f_z A / W_y \\ &\lambda_{\text{rel}y}^2 = \sigma_c / \sigma_{Ey} \end{aligned} \quad (3.16)$$

Udtrykket for den maksimale trykspænding bliver nu

$$\sigma = \frac{P}{A} + \frac{M_{0z} + P f_y}{W_z} \frac{P_{Ez}}{P_{Ez} - P} + \frac{M_{0y} + P f_z}{W_y} \frac{P_{Ey}}{P_{Ey} - P} \leq \sigma_c \quad (3.17)$$

som omskrives til

$$\begin{aligned} &\left(1 + \frac{e_z}{1 - \lambda_{\text{rel}z}^2 \sigma_N / \sigma_c} + \frac{e_y}{1 - \lambda_{\text{rel}y}^2 \sigma_N / \sigma_c}\right) \frac{\sigma_N}{\sigma_c} + \\ &+ \frac{1}{1 - \lambda_{\text{rel}z}^2 \sigma_N / \sigma_c} \frac{\sigma_{Mz}}{\sigma_c} + \frac{1}{1 - \lambda_{\text{rel}y}^2 \sigma_N / \sigma_c} \frac{\sigma_{My}}{\sigma_c} \leq 1 \end{aligned} \quad (3.18)$$